Econometría III

Grado en Economía UB

Apuntes

1. MODELOS UNIVARIANTES DE SERIES TEMPORALES (I)

PROCESOS ESTOCÁSTICOS Y SERIES TEMPORALES

Dos enfoques de análisis de series temporales:

Aproximación clásica o determinista: las series temporales pueden modelizarse mediante una descomposición que considera hasta cuatro posibles componentes combinadas:

1–Tendencia 2–Ciclo 3–Estacional 4-Irregular

Aproximación moderna o estocástica. Se considera que los valores que constituyen una serie temporal son un proceso estocástico (aleatorio y que varía del tiempo): $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_T \equiv \{x_t\}_{t=1}^{T}$

CONDICIONES SOBRE LOS PROCESOS ESTOCÁSTICOS: ESTACIONARIEDAD Y ERGODICIDAD

CONCEPTO DE ESTACIONARIEDAD

Estacionariedad fuerte o en sentido estricto: requiere que **la función de distribución** conjunta del proceso estocástico **no dependa del tiempo**. Que las características del proceso no varían cuando se toman períodos históricos diferentes. Situación irreal en el entorno del análisis económico, dado que las condiciones socioeconómicas cambian mucho de una época a otra. La estacionariedad en sentido estricto es difícil de comprobar en la práctica por lo que nos centraremos en la estacionariedad débil.

Estacionariedad débil, de segundo orden o en covariancias: requiere que los momentos de primer orden (E(x) y V(x)) y de segundo orden (COV(x)) no dependan del tiempo, que sean constantes:

$$\begin{aligned} E\left(x_t\right) &= E\left(x_{t+h}\right) = \mu < \infty \\ V\left(x_t\right) &= V\left(x_{t+h}\right) = \sigma^2 < \infty \\ Cov\left(x_t, x_s\right) &= Cov\left(x_{t+h}, x_{s+h}\right) = \gamma_k < \infty \end{aligned}$$

Las covarianzas entre dos periodos diferentes no deben depender del tiempo sólo únicamente del número de periodos transcurridos.

CONCEPTO DE ERGODICIDAD

Como la condición de que la covarianza no dependa del tiempo no la podremos comprobar porque nuestras muestras serán demasiado pequeñas, deberemos asumir la ergodicidad para aceptar la estacionariedad.

Ergodicidad: un proceso estocástico es ergódico si es posible estimar de forma consistente sus características (si se pueden estimar sus características a partir de una única realización). Por ejemplo que para una covarianza de orden n, si ésta tiende a 0: $\lim_{n\to\infty} \gamma_j \to 0$

FUNCIONES DE AUTOCOVARIANCIA Y AUTOCORRELACIÓN

La función de **autocovarianza**, la función de **autocorrelación simple** (FAS) y la función de **autocorrelación parcial** (FAP) son instrumentos clave para identificar la forma funcional del proceso generador de la serie. La autocovarianza mide la relación entre dos elementos de la serie separados por j períodos. El problema es que es una medida con unidades, no sirve para valorar intensidad de la relación.

FUNCIONES DE AUTOCORRELACIÓN SIMPLE (FAS)

Se obtiene al calcular las autocorrelaciones ($\rho_1, \rho_2 \dots$) para los valores de j y mide la correlación lineal entre los elementos de un proceso estocástico. Ahora sí que podemos valorar la intensidad ya que va de +1 a -1.

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} \qquad \rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} \quad \dots$$

La FAS tiene memoria, si sólo tenemos autocorrelación de orden 1 entonces: $\rho_1,\ \rho_2 = {\rho_1}^2, \rho_3 = {\rho_1}^3 \dots$

FUNCIONES DE AUTOCORRELACIÓN PARCIAL (FAP)

La autocorrelación parcial mide la correlación lineal que existe entre dos miembros del proceso estocástico, medido en diferencias de la media, una vez descontada la influencia de los miembros intermedios.

Por ejemplo, entre x_t y x_{t-3} una vez descontada la influencia de los miembros intermedios x_{t-1} x_{t-2}

Primero definimos: $\tilde{x}_t = (x_t - \bar{x})$

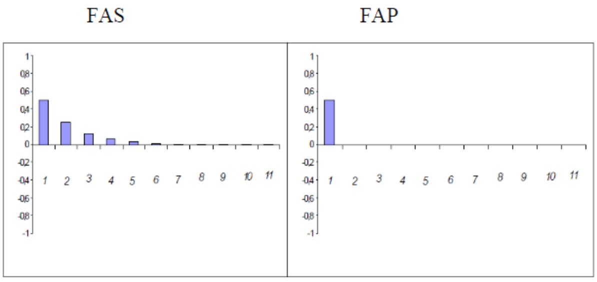
Y vamos sacando coeficientes de la FAP:

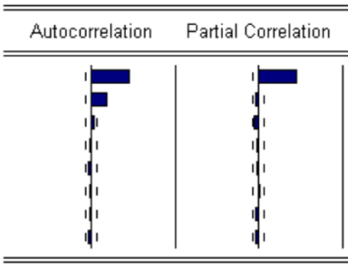
$$\tilde{x}_t = \phi_{11}\tilde{x}_{t-1} + \varepsilon_t. \qquad \tilde{x}_t = \phi_{21}\tilde{x}_{t-1} + \phi_{22}\tilde{x}_{t-2} + \varepsilon_t, \qquad \tilde{x}_t = \phi_{31}\tilde{x}_{t-1} + \phi_{32}\tilde{x}_{t-2} + \phi_{33}\tilde{x}_{t-3} + \varepsilon_t,$$

El primer valor de la FAP coincide con el primer valor de la FAS. Los demás se pueden obtener mediante:

$$\boldsymbol{\phi_{11}} = \rho_1 \qquad \boldsymbol{\phi_{22}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \qquad \boldsymbol{\phi_{33}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \quad \dots$$

Ejemplo: $AR(1) \quad x_t = 0{,}5x_{t-1} + \varepsilon_t$





	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.464	0.464	215.79	0.000
2	0.187	-0.035	251.02	0.000
3	0.034	-0.050	252.22	0.000
4	-0.024	-0.019	252.78	0.000
5	-0.038	-0.012	254.23	0.000
6	-0.009	0.023	254.31	0.000
7	-0.020	-0.029	254.70	0.000
8	-0.036	-0.027	256.01	0.000

Si el proceso estocástico es estacionario en sentido amplio y es ergódico, sus momentos de primer y segundo orden pueden ser estimados mediante una serie temporal muestral.

Los márgenes de significación quedan definidos por la expresión: $\pm 1{,}96/\sqrt{T}$

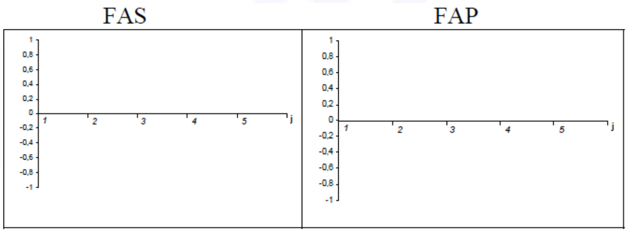
EJEMPLO DE PROCESO ESTOCÁSTICO: RUIDO BLANCO

Por definición el ruido blanco es:

$$x_t = \varepsilon_t$$

$$x_t \sim iid(0, \sigma^2) \qquad E(x_t) = 0 \qquad V(x_t) = \sigma^2 \qquad Cov(x_t, x_s) = 0$$

Como se puede comprobar, ninguna de las tres características (momentos de primer y segundo orden) dependen del tiempo, por tanto, cumplen el requisito que exige la estacionariedad en sentido débil. Un proceso ruido blanco sobre el que además se asume una distribución de normal se conoce con el nombre de proceso gaussiano.



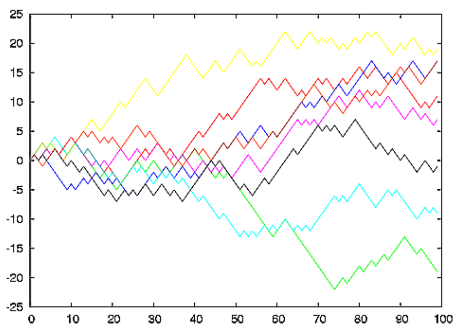
EJEMPLO DE PROCESO ESTOCÁSTICO: CAMINO ALEATORIO

Por definición un camino aleatorio simple es:

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$x_t \sim iid(0,\ \sigma_\varepsilon^2 t) \qquad E(x_t) = 0 \qquad V(x_t) = \sigma_\varepsilon{}^2 t \qquad Cov(x_t, x_{t-1}) = \sigma_\varepsilon{}^2 (t-1)$$

El proceso camino aleatorio es un proceso estocástico estacionario en media (no depende del tiempo, siempre que no tenga constante o deriva) y no estacionario en varianza ni covariancias (sí están en función del tiempo). Por tanto, el proceso es no estacionario en sentido débil. Un camino aleatorio simple, una vez diferenciado, se transforma en ruido blanco. $x_t - x_{t-1} = \varepsilon_t$



2. MODELOS UNIVARIANTES DE SERIES TEMPORALES (II)

INTRODUCCIÓN

La notación de que se hará uso a lo largo de toda la lección implica el uso del operador retardo L. Este operador actúa sobre la variable desfasando su valor tantos períodos como indique su exponente:

$$Lx_t = x_{t-1} \qquad L^2x_t = x_{t-2} \qquad L^4x_t = x_{t-4} \quad L^nx_t = x_{t-n}$$

En el caso de un término constante el operador retardo no provoca ningún efecto: $L \cdot \mu \ = \ \mu$

El operador diferencia se define como una función del operador retardo: $\Delta^n = (1-L)^n$

MODELOS AUTOREGRESIVOS AR(P)

Un proceso autorregresivo de orden p se puede componer de una parte constante/tendencia determinista y una estocástica, el término de perturbación. $f(t) = \mu \ \ o \ \ f(t) = \mu + \beta t$

$$x_t = f(t) + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t \qquad \phi = phi$$

$$\left(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p\right) x_t = f(t) + \varepsilon_t \qquad \phi_p(L) x_t = f(t) + \varepsilon_t$$

Dónde $\phi_p(L)x_t$ es el polinomio autorregresivo o polinomio de retardos de orden p.

En el caso de los modelos autorregresivos, la condición necesaria y suficiente de estacionariedad débil requiere que todas las raíces del polinomio autoregresivo sean, en módulo, superiores a la unidad.

Las raíces del polinomio autorregresivo se obtienen al igualarlo a cero y calcular sus soluciones:

$$\phi_p(L) = 0$$

Dado que el polinomio autorregresivo es de orden p, habrá p posibles soluciones (raíces). Es necesario comprobar que todas las soluciones son, en módulo, superiores a 1.

Ejemplo: en los siguientes casos, ¿podemos decir que las raices son superiores a 1?

a) $x_t = 0{,}9x_{t-1} - 0{,}18x_{t-2} + \varepsilon_t$

$$x_t = 0.9x_{t-1} - 0.18x_{t-2} + \varepsilon_t.$$

El polinomi autoregressiu s'obté en expressar el model com

$$\left(1 - 0.9L + 0.18L^2\right) x_t = \varepsilon_t$$

on es pot veure que el polinomi autoregressiu és

$$\phi_2(L) = \left(1 - 0.9L + 0.18L^2\right)$$

Les arrels del polinomi autoregressiu s'obtenen com:

$$\begin{aligned} L_i &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{0.9 \pm \sqrt{0.9^2 - 4 * 0.18}}{2 * 0.18} \end{aligned}$$

és a dir, $L_1 = 3.3333 = \left(\frac{1}{0.3}\right)$ i $L_2 = 1.6666 = \left(\frac{1}{0.6}\right)$. Per tant, **totes les arrels** del polinomi autoregressiu són, en mòdul, **majors que 1** → el procés és **estacionari en sentit dèbil**.

b) $x_t = 0{,}8x_{t-1} + 0{,}3x_{t-2} + \varepsilon_t$

$$(1 - 0{,}8L - 0{,}3L^2)x_t = \varepsilon_t \qquad \begin{cases} a: -0{,}3 \\ b: -0{,}8 \\ c: 1 \end{cases} \qquad \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-0{,}8) \pm \sqrt{(-0{,}8)^2 - 4 \cdot (-0{,}3) \cdot 1}}{2 \cdot (-0{,}3)} = \begin{cases} -3{,}59 \\ 3{,}06 \end{cases}$$

Es estacionario puesto que todas las raíces son superiores a |1|

c) $\phi_2(L) = (1 - 1{,}22L)(1 - 0{,}81L)$

$$1 - 1{,}22L = 0 \quad L = \frac{1}{1{,}22} = 0{,}82 \qquad 1 - 0{,}81L = 0 \quad L = \frac{1}{0{,}81} = 1{,}23$$

Es estacionario puesto que todas las raíces son superiores a |1|

MODELO AUTOREGRESIVO AR(1)

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t \;\; \rightarrow \;\; (1-\phi_1 L)x_t = f(t) + \varepsilon_t$$

El proceso **siempre** es **invertible** y es **estacionario** si:

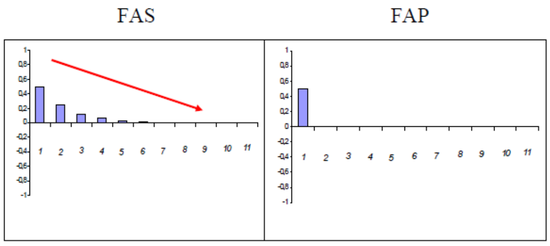
$$1-\phi_1 L = 0 \;\; \rightarrow \;\; |L| = \left|\frac{1}{\phi_1}\right| > 1 \;\; \rightarrow |\phi_1| < 1$$

Los momentos de primer y segundo orden del proceso son:

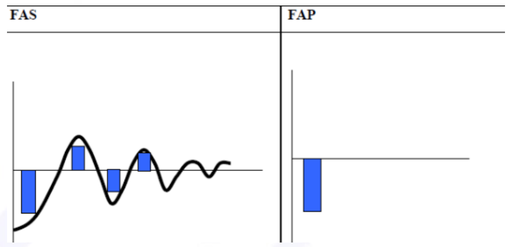
$$E(x_t) = 0 \qquad V(x_t) = {\sigma_x}^2 = \frac{{\sigma_\varepsilon}^2}{1-\phi^2} \qquad Cov(x_t, x_{t-k}) = \gamma_k$$

La FAS tendrá un rápido decrecimiento y la FAP un pico.

$\phi_1 > 0$



$\phi_1 < 0$



MODELO AUTOREGRESIVO AR(2)

$$x_t = f(t) + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t \;\; \rightarrow \;\; (1-\phi_1 L - \phi_2 L^2)x_t = f(t) + \varepsilon_t$$

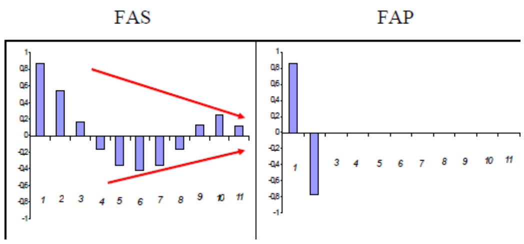
El proceso **siempre** es **invertible** y es **estacionario** si:

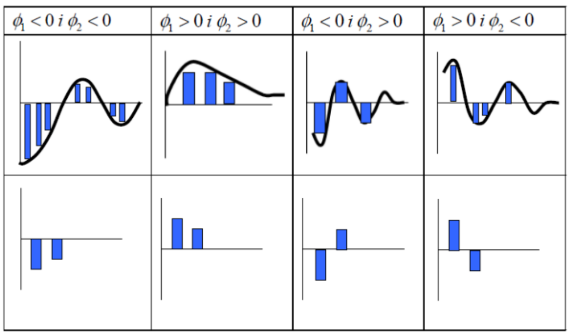
$$1-\phi_1 L - \phi_2 L^2 = 0 \;\; \rightarrow \;\; |L| > 1 \;\; \rightarrow \begin{cases} \phi_1 + \phi_2 < 1 \\ \phi_2 - \phi_1 < 1 \\ |\phi_2| < 1 \end{cases}$$

Los momentos de primer y segundo orden del proceso son:

$$E(x_t) = \mu \qquad V(x_t) = \gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + {\sigma_\varepsilon}^2 \qquad Cov\left(x_t, x_{t-j}\right) = \gamma_k$$

La FAS tendrá un rápido decrecimiento y la FAP dos picos.





Este dosier está hecho para seguir la clase de prueba.

Si te apuntas al curso te enviaremos por correo el dosier entero con todos los temas que faltan, ejercicios y exámenes de años anteriores

Más información en:

www.estadistix.com

Y si tienes cualquier consulta,
escríbenos un whatsapp al 644310902